## **基础课45 直线与圆、圆与圆的位置关系**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 直线与圆的位置关系 | 理解 | 2023年新高考Ⅰ卷  2023年新高考Ⅱ卷  2023年天津卷  2023年全国甲卷（文）  2023年全国乙卷（理）  2022年新高考Ⅰ卷  2022年新高考Ⅱ卷 | ★★★ | 直观想象  数学运算  逻辑推理 |
| 圆与圆的位置关系 | 理解 | 2019年全国Ⅱ卷（理） | ★★☆ | 直观想象  数学运算  逻辑推理 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，本基础课内容主要集中在直线与圆的位置关系的综合问题，在2025届高考的备考中，要重点关注圆的几何性质在研究圆锥曲线几何量中的应用，特别是圆的切线问题在研究椭圆、双曲线几何性质中的应用，圆的几何性质与抛物线焦点弦、准线的结合，都可能成为命题的热点 | | | |

### **基础知识·诊断**

#### **夯实基础**

##### **一、直线与圆的位置关系**

设圆,直线,圆心到直线的距离为,由消去（或）,得到关于（或）的一元二次方程，其判别式为 ,则直线与圆的位置关系如表所示：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 位置关系 | | 相离 | 相切 | 相交 |
| 图形 | |  |  |  |
| 量化 | 方程观点 | 0 | 0 | 0 |
| 几何观点 |  |  |  |

##### **二、圆与圆的位置关系**

设圆,的半径为,，两圆圆心间的距离为，则两圆的位置关系如表所示：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 位置关系 | 图形 | 几何维度 | 方程维度 | 公切线维度 |
| 外离 |  | ⑦ |  | 4条 |
| 外切 |  | ⑧ |  | 3条 |
| 相交 |  | ⑨ |  | 2条 |
| 内切 |  | ⑩ |  | 1条 |
| 内含 |  | ⑪ |  | 0条 |

###### **知识 拓展**

1.圆的切线方程的常用结论

（1）过圆上一点的圆的切线方程为.

（2）过圆上一点的圆的切线方程为.

（3）过圆外一点可引圆的两条切线，切点为,，则切点弦所在的直线方程为.

（4）过圆外一点可引圆的两条切线，切点为,，则切点弦所在直线的方程为.

2.过圆内一点最长的弦是直径，最短的弦是垂直于这点与圆心连线的弦.

3.过两圆交点的圆系方程

过圆与圆交点的圆系方程为，此圆系中不含圆.

【注意】当时，得方程，即两个圆公共弦所在的直线方程.

#### **诊断自测**

##### **题组1 走出误区**

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 如果两圆的圆心距小于两圆的半径之和,那么两圆相交.( × )

（2） 从两圆的方程中消掉二次项后得到的二元一次方程是两圆的公共弦所在的直线方程.( × )

（3） 过圆上一点的圆的切线方程是.( √ )

（4） 如果直线与圆组成的方程组有解,那么直线与圆相交或相切.( √ )

2. （易错题）若过点作圆的切线，则切线的方程为或.

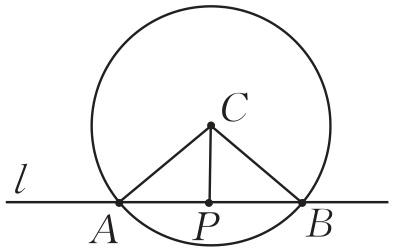
**【易错点】**过圆外一点作圆的切线有两条，忽视斜率不存在的切线这种情况而致误.

[解析]根据题意，圆，即，其圆心为，半径.若直线的斜率不存在，则直线的方程为，圆心到直线的距离，与圆相切，符合题意； 若直线的斜率存在，设直线的斜率为，则直线的方程为，即，则，解得，此时直线的方程为.故直线的方程为或.

##### **题组2 走进教材**

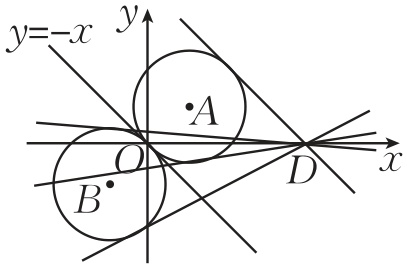
3. （双空题）（人教A版选修改编）已知圆，直线，当直线被圆截得的弦长最短时，的值为，最短弦长为.

[解析]直线的方程可化为，联立解得所以直线恒过点.因为在圆内,所以当直线时，直线被圆截得的弦长最短，如图. 直线的斜率为，，由，解得，此时直线的方程是.因为圆心到直线的距离，圆的半径,所以，所以最短弦长是.



4. （双空题）（人教A版选修改编）由曲线围成的封闭图形的面积为，若直线与曲线恰有两个公共点，则实数的取值范围为.

[解析]如图所示，当时，，设其圆心为，易知，所以圆与直线相切；当时，，设其圆心为，易知，所以圆与直线相切. 故曲线围成的封闭图形为圆与圆，其面积为 .由可知其恒过点，过与圆和圆相切的切线分别设为，，则，解得或，，由图象分析可得若直线与曲线恰有两个交点，则.

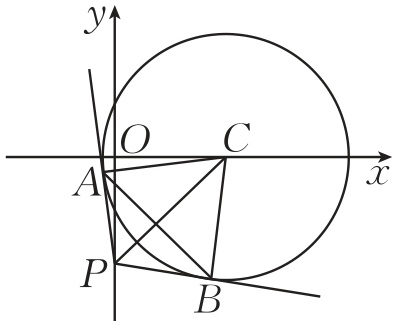


##### **题组3 走向高考**

5. [2023·新高考Ⅰ卷]若过点与圆相切的两条直线的夹角为 ，则( B ).

A. 1 B. C. D.

[解析]，即，可得圆心，半径，如图，过点作圆的切线，切点为,，因为，所以，所以,，所以，，即为钝角，所以.故选.



### **考点聚焦·突破**

#### **考点一 直线与圆的位置关系［自主练透］**

1. [2024·海淀模拟改编]已知圆，若直线与圆相切，则的值为( D ).

A. 1 B. C. D.

[解析]在圆中，圆心，因为直线与圆相切，所以，故.故选.

2. [2024·柳州校考]已知圆及直线，则直线与圆的位置关系是( A ).

A. 相交 B. 相切 C. 相离 D. 不确定

[解析]直线，即，

由解得则直线恒过点，

而当时，，因此点在圆内，所以直线与圆的位置关系是相交.故选.

3. （多选题）已知圆，直线，则( BD ).

A. 对任意实数与 ，直线和圆相切

B. 对任意实数与 ，直线和圆有公共点

C. 对任意实数 ，必存在实数，使得直线和圆相切

D. 对任意实数，必存在实数 ，使得直线和圆相切

[解析]圆恒过点，直线也恒过点，

所以对任意实数与 ，直线和圆有公共点，故正确；

圆心到直线的距离，其中，

则对任意实数，存在 ，使得直线和圆的位置关系是相交或者相切，故正确，错误；

当时，圆为，此时不存在实数，使得直线和圆相切，故错误.故选.

4. [2022·新高考Ⅱ卷]设点,，若直线关于的对称直线与圆存在公共点，则实数的取值范围为,.

[解析]因为，所以直线关于直线的对称直线为，所以，整理可得，解得.



**判断直线与圆的位置关系常见的两种方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 代数法 | 将直线方程与圆的方程联立，消元得到一元二次方程，利用根的判别式：相交；相切；相离 |
| 几何法 | 利用圆心到直线的距离和圆的半径的大小关系：相交；相切；相离 |

#### **考点二 圆的弦长、切线问题［多维探究］**

##### **弦长问题角度1**

典例1 [2024·广州模拟]写出经过点且被圆截得的弦长为的一条直线的方程为（或）.

[解析]圆的方程可化为，圆心为点，半径.

当过点的直线的斜率不存在时，直线方程为，此时圆心在直线上，弦长为，不满足题意，所以过点的直线的斜率存在，设过点的直线的方程为，

即，则圆心到直线的距离，

依题意得，即，解得或，故所求直线的方程为或.



**有关弦长问题的两种求法**

|  |  |
| --- | --- |
| 几何法 | 直线被圆截得的半弦长、弦心距和圆的半径构成直角三角形,即 |
| 代数法 | 联立直线方程和圆的方程,消元转化为关于的一元二次方程,由根与系数的关系,即可求得弦长或 |

##### **切线问题角度2**

典例2（1） [2024·福建模拟]已知直线与圆相交于，两点，则“”是“”的( B ).

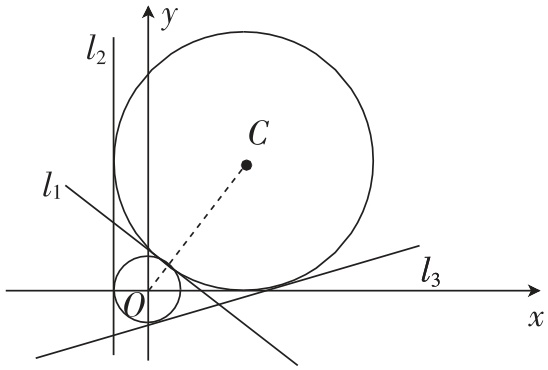
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

[解析]因为直线与圆相交于，两点，所以设圆心到直线的距离为，则等价于，即，所以，解得或，所以“”是“”的必要不充分条件.故选.

（2） [2022·新高考Ⅰ卷]写出与圆和都相切的一条直线的方程：（或或）.

[解析]由两圆方程可得，两圆圆心距，两圆半径分别为，，因为，所以两圆外切，所以两圆有三条公切线，如图所示.



因为,所以,设直线,即，由,得（负值舍去），

所以直线的方程为.

由图可知，直线,且与关于直线对称，

联立解得

即直线与的交点为,

在上取一点,设该点关于直线的对称点为,

则解得所以,

所以直线的方程为,即.

故与两圆都相切的一条直线方程是或或.



**求圆的切线方程的两种方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 几何法 | 设切线方程为，利用点到直线的距离公式表示出圆心到切线的距离，然后令，进而求出 |
| 代数法 | 设切线方程为，与圆的方程组成方程组，消元后得到一元二次方程，然后令判别式，进而求出 |

【注意】当切线的斜率不存在时，一般采用数形结合法.

##### **多维训练**

1. [2024·湖南模拟]设直线与圆相交于，两点，且弦的长为，则实数的值是.

[解析]由圆的方程，得圆心坐标为，半径，

圆心到直线的距离，

且，,即，

.

2. [2024·洛阳模拟]已知直线,,圆，则以下结论正确的是②③④.（填序号）

①直线,均与圆不一定相交；

②直线被圆截得的弦长的最小值为；

③直线被圆截得的弦长的最大值为6；

④若直线与圆交于，两点，与圆交于，两点，则四边形面积的最大值为14.

[解析]如图，由直线，得，故恒过点.

由直线，得，故也恒过点.

的圆心为，半径，

因为，所以直线,均与圆相交，故①不正确.

当时，直线被圆截得的弦长最小，最小值为，故②正确.

当直线经过圆心时，直线被圆截得的弦长最大，最大值为，故③正确.

当时，；当时，由，得.

故直线与直线恒垂直，圆心到直线的距离，

圆心到直线的距离，

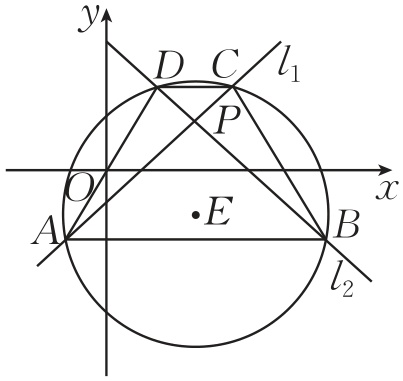
故，

，

所以四边形的面积，

令，则，所以，

因为，所以，所以当，即，时，取得最大值，最大值为14，故④正确.



#### **考点三 圆与圆的位置关系［师生共研］**

典例3 已知圆与圆外切,其中,,则的最大值为( C ).

A. B. C. D.

[解析]由圆与圆外切,可得,即.根据基本不等式可知,当且仅当时，等号成立,故的最大值为.故选.

变式设问1 若将本例条件中的“外切”变为“内切”,则的最大值为.

[解析]由与内切,得,即.又,当且仅当时，等号成立,所以的最大值为.

变式设问2 若将本例条件中的“外切”变为“相交”,则公共弦所在的直线方程为.

[解析]由题意把圆,圆的方程都化为一般方程,得

圆, ①

圆, ②

由得,

即为所求公共弦所在的直线方程.



**圆与圆位置关系问题的解题策略**

1.判断两圆的位置关系时常用几何法,即利用两圆圆心之间的距离与两圆半径之间的关系,一般不采用代数法.

2.若两圆相交,则两圆公共弦所在直线的方程可由两圆的方程作差消去,项得到.

##### **针对训练**

1. （多选题）（原创）集合，，若 ，其中，则的可能取值为( AD ).

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

[解析]圆的圆心是，半径为，

圆的圆心是，半径为，

因为 ，所以两圆相离或内含，又,

所以当两圆相离时，，,故正确；当两圆内含时，，，故,错误，正确.故选.

2. （改编）古希腊数学家阿波罗尼奥斯（约公元前 公元前190年）的著作《圆锥曲线论》是古代世界光辉的科学成果，著作中有这样一个命题：平面内与两定点距离的比为常数且的点的轨迹是圆.后人将这个圆称为阿波罗尼斯圆.已知,,动点满足，则动点的轨迹与圆的位置关系是( A ).

A. 相交 B. 相离 C. 内切 D. 外切

[解析]由条件可知，，化简为，故动点的轨迹是以为圆心，为半径的圆，圆是以为圆心，为半径的圆，故两圆圆心间的距离，又因为，所以两圆相交.故选.

### **拓展教材 深度学习**

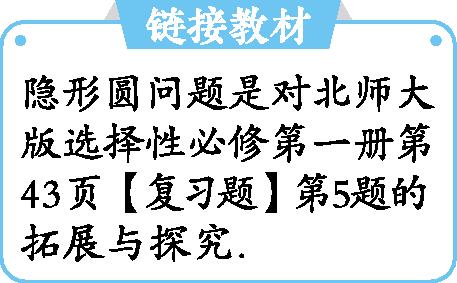
**隐形圆问题**

在直线与圆的综合考查中，有时题设条件并没有直接给出相关圆的信息，而是隐含在题目中，要通过分析和转化，发现圆的方程或圆的定义，从而利用圆的知识来求解，这类问题常被称为“隐形圆”问题.此类问题在教材中出现过相关例题，通过对教材例题分析与研究，可以拓展总结为如下的几种类型：

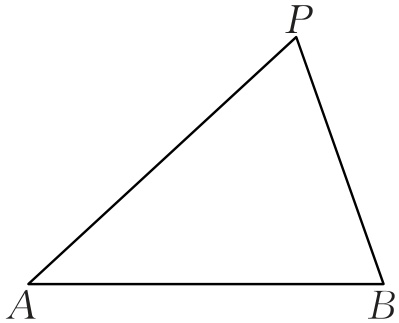
1.已知两定点,，若动点满足且，则可以确定隐形圆（阿波罗尼斯圆）;

2.已知两定点,，若动点满足，则可以确定隐形圆;

3.已知两定点,，若动点满足，则可以确定隐形圆.



典例 如图，已知两定点,，动点满足且，求证：点的轨迹为一个圆.



[解析]设,以的中点为原点，直线为轴建立平面直角坐标系（图略），则，.

设，则由得，

两边平方并化简整理得，

当时，，轨迹为线段的垂直平分线；

当时，，轨迹为以点,为圆心，以为半径的圆.

变式设问1 若将典例中的条件“动点满足且”改为“动点满足”，求证：点的轨迹为一个圆.

[解析]设，以的中点为原点，直线为轴建立平面直角坐标系（图略），则,，

设，则,，

则由 ,得 ，即 ，

当,即时，，轨迹是以点为圆心，为半径的圆.

变式设问2 若将典例中的条件“动点满足且”改为“动点满足”，求证：点的轨迹为一个圆.

[解析]设，以的中点为原点，直线为轴建立平面直角坐标系（图略），则,，设，所以，，

则由 ，得 ,

整理得.

当，即时，，轨迹是以点为圆心，为半径的圆.

深度训练1 已知为原点，，，若，则的最大值为.

[解析]设，由，得，即，记为圆.

故的轨迹是圆心为，半径的圆.

又，所以.

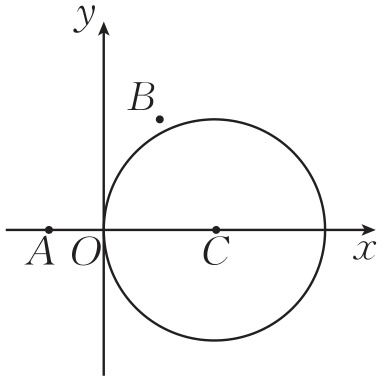
深度训练2 已知点，，若圆上存在点满足，求实数的取值范围.

[解析]设，因为，所以，即，故的轨迹是以为圆心，2为半径的圆.

又因为点在圆上，

所以两圆必有交点，，即，解得，故实数的取值范围为.

深度训练3 如图，在平面直角坐标系中，已知圆及点，.在圆上是否存在点，使得？若存在，求点的个数;若不存在，请说明理由.



[解析]存在.圆的标准方程为，

所以圆心，半径为2.

假设圆上存在点满足题意，设，

则，

即，点的轨迹是圆心为，半径为2的圆.

因为，

所以圆与圆相交，

所以点的个数为2.